Równania stopnia trzeciego z jedną niewiadomą

Opracowanie Zbigniew Stebel

(A) Podstawowe fakty

Równanie stopnia trzeciego postaci

(1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

może posiadać

A) jeden pierwiastek rzeczywisty oraz dwa ze sobą sprzężone pierwiastki zespolone,
B) jeden pierwiastek pojedyńczy oraz jeden podwójny,
C) trzy różne pierwiastki pojedyncze.

Równanie (1) możemy również zapisać w postaci

(2) $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

Ze wzorów (1) i (2) wynika, że

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3)$$
(3) $$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$
$$c = -x_1 x_2 x_3$$

Przykład 1.

Wiedząc, że 1,2,3 są pierwiastkami równania kubicznego znaleźć to równanie

$a = -(1+2+3) = -6,\ b = 2+3+6 = 11,\ c = -6.$

Zatem równanie przyjmuje postać $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$

Podstawiając $x = z - \frac{a}{3}$ do równania (1) otrzymujemy równanie równoważne postaci

(4) $z^3 + pz + q = 0.$

Przykład 2.

Równanie postaci $x^3 + 9x^2 + 2x - 1 = 0$ przedstawić w postaci równoważnej

Niech $x = z - 3$

Wtedy $(z-3)^3 + 9(z-3)^2 + 2(z-3) - 1 = 0$,stosując wzory skróconego mnożenia otrzymujemy

$z^3 + 3z^2(-3) + 3z(-3)^2 + (-3)^3 + 9z^2 - 54z + 81 + 2z - 6 - 1 = z^3 - 9z^2 + 27z - 27 + 9z^2 - 54z + 81 + 2z - 6 - 1 = 0$ i po redukcji wyrazów podobnych mamy równanie

$z^3 - 25z - 47 = 0.$

Równanie (4) rozwiązujemy za pomocą wzorów **Cardana-Tartaglii**

Oznaczmy

(5) $\Delta^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$

Ad(A) Jeśli $\Delta^3 > 0$ wówczas równanie ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa pierwiastki zespolone ze sobą sprzężone liczone ze wzorów

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta^3}}$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2} + \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta^3}}}{2}\sqrt{3}i$$

$$z_3 = -\frac{z_1}{2} - \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta^3}}}{2}\sqrt{3}i$$

Ad(B) Jeśli $\Delta^3 = 0$ równanie ma jeden pierwiastek pojedynczy i jeden podwójny liczone ze wzorów

$$z_1 = \frac{3q}{p}$$

$$z_2 = z_3 = -\frac{z_1}{2}$$

Ad(C) Jeśli $\Delta^3 < 0$ równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste pojedyncze liczone ze wzorów

$$z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\phi}{3}$$

$$z_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} - 120^\circ)$$

$$z_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\phi}{3} + 120^\circ)$$, gdzie $\cos\phi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$.

(B) Przykłady rozwiązania równań bez stosowania wzorów **Cardana-Tartaglii**

1. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
Jest to równanie postaci $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
Wszystkie dzielniki wyrazu wolnego to $D_{|6|} = \{\pm 6; \pm 3; \pm 2; \pm 1\}$
Sprawdzając stwierdzamy, że dla $x = -1$ wielomian $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$,gdyż $W(-1) = 0$.
$(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x + 1) = x^2 - 5x + 6$,zatem mamy równanie równoważne $(x^2 - 5x + 6)(x + 1) = 0$.
Dla $x = 2$ wielomian $W(x) = x^2 - 5x + 6$ przyjmuje wartość zero, czyli jest podzielny przez dwumian $x - 2$.
$(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2) = x - 3$.Ostatecznie równanie przyjmuje postać $(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$.
Zatem otrzymujemy trzy różne pierwiastki całkowite
$x_1 = -1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3$
które są rozwiązaniem tego równania.
Sprawdzenie:
$$-(x_1 + x_2 + x_3) = -4 = a$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -2 + 6 - 3 = 1 = b$$
$$-x_1x_2x_3 = 6$$

2. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$
$D_{|5|} = \{\pm 1; \pm 5\}$
Sprawdzając stwierdzamy, że $W(5) = 0$.Dzieląc wielomian W(x) przez dwumian $x - 5$ otrzymujemy wielomian stopnia drugiego $x^2 + x + 1$.Zatem równanie równoważne ma postać $(x - 5)(x^2 + x + 1) = 0$.

Dzielniki wyrazu wolnego wielomianu $W(x) = x^2 + x + 1$ nie zerują tego wielomianu, zatem skorzystamy z algorytmu rozwiązywania równań kwadratowych.

$\Delta^2 = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 = 3i^2$, gdzie i jest jednostką urojoną ($i := (0;1)$).

Ponieważ $\Delta^2 < 0$ więc równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych, tylko dwa ze sobą sprzężone pierwiastki zespolone.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta^2}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta^2}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3}$$

Ostatecznie równanie spełniają dwa pierwiastki zespolone i jeden rzeczywisty $x_3 = 5$.

3. $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$

$D_{|-2|} = \{\pm 1; \pm 2\}$

$W(-2) = 0$, zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$

$W(x) \div (x + 2) = 9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$ ze wzoru na kwadrat różnicy.

Zatem równanie równoważne przyjmuje postać $(x + 2)(3x - 1)(3x + 1) = 0$, skąd rozwiązaniem równania są trzy różne pierwiastki

rzeczywiste $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$

4. $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$

Zauważmy, że $W(1) = 0$,zatem $W(x) \div (x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$, więc mamy równanie: $(x - 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 0$ równoważne.

Ponieważ $W(-2) = 0$ więc $(x^3 - 5x^2 - 2x + 4) \div (x + 2) = x^2 + 2$, zatem otrzymujemy: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 2) = 0$.

Równanie $x^2+2=\left(x+i\sqrt{2}\right)\left(x-i\sqrt{2}\right)=0$ ma dwa pierwiastki zespolone. Ostatecznie równanie (4) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste oraz dwa zespolone ze sobą sprzężone. $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1 \\ x_3=-i\sqrt{2} \\ x_4=i\sqrt{2} \end{cases}$

(B) Przykłady rozwiązania równań z zastosowaniem wzorów **Cardana-Tartaglii**

Równanie $x^3+6x^2+9x+4=0$
Jest to równanie postaci $x^3+ax^2+bx+c=0.$
Niech $x=z-\frac{a}{3}=z-2.$ Wtedy po podstawieniu otrzymujemy
$(z-2)^3+6(z-2)^2+9(z-2)+4=0.$ Po zastosowaniu wzorów na sześcian i kwadrat różnicy mamy
$z^3-6z^2+12z-8+6z^2-24z+24+9z-14=0,$ skąd po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie
$z^3-3z+2=0,$ czyli równanie równoważne postaci $x^3+pz+q=0.$
$\Delta^3=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=1-1=0.$ Zatem równanie to względem zmiennej z ma jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedynczy w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$z_1=\frac{3q}{p}=-2$$

$$z_2=z_3=\frac{-z_1}{2}=1.$$

Powracając do zmiennej x otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1=z_1-2=-4 \\ x_2=z_2-2=-1 \\ x_3=z_3-2=-1. \end{cases}$$

Równanie $z^3-6z-4=0.$
$\Delta^3=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-4<0,$ zatem równanie to ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

$$\cos\phi = \frac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = 45^\circ.$$ Liczymy pierwiastki

$$\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\phi}{3} = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ \\ z_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3}+120^\circ\right) = 2\sqrt{2}\cos 135^\circ \\ z_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3}-120^\circ\right) = 2\sqrt{2}\cos 105^\circ \end{cases}$$

Łatwo obliczyć, że

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ Sprawdzić jako ćwiczenie.

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) = 1+\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -2,$$

$$z_3 = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right) = 1-\sqrt{3}.$$

Łatwo widać, że rozwiązaniem równania są dwa pierwiastki zespolone ze sobą sprzężone i jeden pierwiastek całkowity czyli rzeczywisty.

Równanie $z^3 - 3z + 2 = 0$

$$\Delta^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 1 - 1 = 0$$

Zatem, równanie to ma jeden pierwiastek pojedynczy i jeden podwójny

$$z_1 = \frac{3q}{p} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$z_2 = z_3 = \frac{-z_1}{2} = 1$$

Rozwiązanie tego równania spełniają liczby: -2 i 1.

Zadanie (i).

Uzasadnić, że każde równanie postaci $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ można sprowadzić do postaci $z^3 + pz + q = 0$

Dowód: Niech $x = z - \frac{a}{3}$.

Wtedy po podstawieniu do równania otrzymujemy

$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$. Korzystając ze wzorów na sześcian i kwadrat różnicy otrzymujemy

$z^3 + 3z^2\left(\frac{-a}{3}\right) + 3z\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + \left(\frac{-a}{3}\right)^3 + a\left(z^2 - \frac{2}{3}az + \frac{a^2}{9}\right) + bz - \frac{ab}{3} + c = 0.$ Po uproszczeniu otrzymujemy

$z^3 - az^2 + \frac{a^2}{3}z - \frac{a^3}{27} + az^2 - \frac{2}{3}a^2 z + \frac{a^3}{9} + bz - \frac{ab}{3} + c = 0$. Po redukcji wyrazów podobnych mamy

$z^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}a^2 + b\right)z + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{27}\right) = 0,$ stąd

$z^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)z + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2}{27}a^3\right) = 0.$ Podstawiając odpowiednio $p = b - \frac{1}{3}a^2, q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$ otrzymujemy równanie równoważne $z^3 + pz + q = 0$ co należało pokazać.

Zadanie (j).
Uzasadnić, że współczynniki a,b i c w równaniu $x^3+ax^2+bx+c=0$ obliczamy ze wzorów

$$\begin{cases} a=-(x_1+x_2+x_3) \\ b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \\ c=-x_1x_2x_3 \end{cases}$$

gdzie x_1,x_2,x_3 są pierwiastkami równania.

Dowód:
Równanie w zadaniu jest równoważne równaniu postaci: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$.Stąd otrzymujemy $x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0$.Porównując równanie dane w zadaniu z ostatnim otrzymujemy wzory na obliczanie współczynników a,b i c.

Literatura
В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике.Издательство ,,Наука” Москва 1964